

DESENROLO MULTIPOLAR DAS FONTES

Potenciales de Debye

Seguiremos o método de Bouwkhamp e Casimir pra resolver a ecuación de ondas con fontes en coordenadas esféricas. Supoñendo campos monocromáticos, a ecuación de ondas (3.2) escríbese, en notación complexa

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho + i\omega\mu_0 \mathbf{J} \quad (6.34)$$

Definindo

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \mathbf{J} \quad (6.35)$$

pola ecuación de continuidade temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E}' = -\frac{i}{\omega\varepsilon_0} (i\omega\rho + \nabla \cdot \mathbf{J}) = 0 \quad (6.36)$$

Combinandoa con

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}' = \frac{1}{\varepsilon_0} \nabla \rho + i\omega\mu_0 \mathbf{J} - \frac{i}{\omega\varepsilon_0} (\nabla \nabla \cdot \mathbf{J} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{J} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{J})$$

obtemos a ecuación

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{E}' = \frac{i}{\omega\varepsilon_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{J} \quad (6.37)$$

Agora aplicamos a identidade

$$\nabla^2(\mathbf{r} \cdot \Phi) = 2\nabla \cdot \Phi + \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \Phi \quad (3.40)$$

Ó produto escalar de (6.37) por \mathbf{r} :

$$(\nabla^2 + k^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}') = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{J} \quad (6.38)$$

Así podemos calcular o potencial de Debye $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}'$ como un potencial retardado (6.7):

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}' = \frac{-i}{4\pi\omega\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{J} e^{-ikR}}{R} dv' \quad (6.39)$$

Por outro lado, de (3.3),

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (3.3)$$

deducimos, polo mesmo cálculo

$$(\nabla^2 + k^2)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{H}) = -\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{J} \quad (6.40)$$

e isto leva a que

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J} e^{-ikR}}{R} dv' \quad (6.41)$$

Coa identidade vectorial $\nabla' \cdot (\mathbf{J} \times \mathbf{r}' \psi) = (\mathbf{r}' \psi) \cdot (\nabla' \times \mathbf{J}) - \mathbf{J} \cdot \nabla' \times (\mathbf{r}' \psi)$, podemos facer

$$\int_{V'} \frac{\mathbf{r}' \cdot \nabla' \times \mathbf{J} e^{-ikR}}{R} dv' = \oint_{S'} \left(\mathbf{J} \times \frac{\mathbf{r}' e^{-ikR}}{R} \right) \cdot d\mathbf{a} + \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla' \times \frac{\mathbf{r}' e^{-ikR}}{R} dv'.$$

Se V' contén tódalas correntes, a integral de superficie é cero, quedando ¹

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla' \times \frac{\mathbf{r}' e^{-ikR}}{R} dv' \quad (6.42)$$

Ó campo eléctrico (6.39) aplicámoslle dúas veces o proceso anterior. Ademais fóra do volumen V' as correntes son cero, logo $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$. Polo tanto

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}|_{V_\infty - V'} = \frac{1}{4\pi} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla' \times \nabla' \times \frac{\mathbf{r}' e^{-ikR}}{R} dv' \quad (6.43)$$

Desenrolo multipolar

O teorema de adición das funcións esféricas de Hankel

$$\frac{e^{-ikR}}{kR} = h_0^{(2)}(kR) = 4\pi i \sum_{l=0}^{\infty} h_l^{(2)}(kr) j_l(kr') \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') \quad (6.39)$$

permite desenrolar (6.41) no volumen V_2 exterior a unha esfera S que contén as correntes (fig. 3) como

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{H}|_{V_2} &= \\ &= ik \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_l^{(2)}(r) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla' \times [\mathbf{r}' j_l(r') Y_{lm}(\theta', \varphi')] dv' \end{aligned}$$

De igual maneira procedemos con $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}$, partindo de (6.43):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{E}|_{V_2} &= \\ &= Z_0 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_l^{(2)}(r) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla' \times \nabla' \times [\mathbf{r}' j_l(kr') Y_{lm}(\theta', \varphi')] dv' \end{aligned}$$

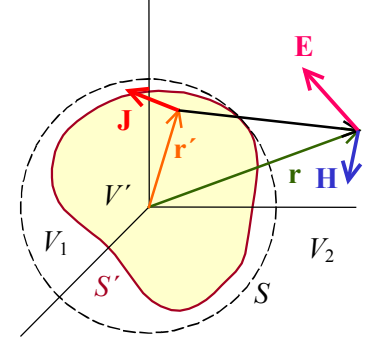


Fig. 6.3

Os resultados das integrais son coeficientes constantes, e os campos $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{lm}^{(M)}$ en (3.54) e $\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_{lm}^{(E)}$ en (3.53) e coinciden, salvo constantes, cos que aparecen fóra das integrais anteriores. Logo estes son os desenrols dos potenciais de Debye dos campos.

Por outro lado, os rotacionais das integrais son os campos eléctricos conxugados dos multipolos magnético e eléctrico coa función radial $R_l = j_l$, e dicir, os correspondentes ó problema interno (representado co subíndice á esquerda):

$$A_{lm}^{(E)} = \frac{k}{l(l+1)} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla' \times \nabla' \times [\mathbf{r}' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi')] dv' = \frac{-k^2}{l(l+1)Z_0} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{lm}^{*(E)} dv' \quad (6.34)$$

¹ Esta última forma é máis convinte, porque non existe derivar \mathbf{J} , cousa que ademais pódese presentar dificultades, en especial cando se trata de distribucións de corrente singulares.

$$A_{lm}^{(M)} = \frac{ik^2}{l(l+1)} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \nabla' \times [\mathbf{r}' j_l(kr') Y_{lm}^*(\theta', \varphi')] dv' = \frac{-k^2}{l(l+1)Z_0} \int_{V'} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{lm}^{*(M)} dv' \quad (6.33)$$

Os coeficientes teñen dimensións de campo \mathbf{H} , igual ca os calculados anteriormente. Os campos completos son as combinacións lineales (3.52).

ENERXÍA E MOMENTO ANGULAR RADIADOS POR MULTIPOLOS

Podemos calcular a potencia radiada integrando o promedio temporal do vector de Poynting sobre unha esfera S de radio r :

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int r^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_r d\Omega$$

Pra un *multipolo unidade* de índices (l, m) , de (3.53) ou (3.54) obtemos

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)_{rad} &= -i \frac{Z_0}{k} h_l^{(2)}(kr) \frac{d}{dr} [r h_l^{(2)}(kr)]^* (\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}) \times \nabla Y_{lm}^* = \\ &= -i Z_0 \frac{r}{k} h_l^{(2)}(kr) \frac{d}{dr} [r h_l^{(2)}(kr)]^* (\hat{\mathbf{r}} \times \nabla Y_{lm}) \times \nabla Y_{lm}^* \end{aligned}$$

A partir daqui, tendo en conta que as funcións esféricas de Hankel teñen a forma

$$h_l^{(2)}(kr) = i^{l+1} \frac{e^{-ikr}}{kr} p_l\left(\frac{1}{kr}\right),$$

onde por p_l representamos un certo polinomio co término de grado 0 igual á unidade,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left\{ -i \frac{r}{k} h_l^{(2)}(kr) \frac{d}{dr} [r h_l^{(2)}(kr)]^* \right\} = -\frac{1}{k^2}$$

Polo demais

$$\oint_S [(\hat{\mathbf{r}} \times \nabla Y_{lm}) \times \nabla Y_{lm}^*] \cdot d\mathbf{a} = r^2 \int [(\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm}) \times \nabla Y_{lm}^*]_r d\Omega = -r^2 \int |\nabla Y_{lm}|^2 d\Omega = -l(l+1)$$

Logo a potencia \mathcal{P}_l radiada polo multipolo unidade é

$$\mathcal{P}_l = \frac{Z_0}{2k^2} l(l+1) \quad (6.34)$$

Como un resultado notable, vemos que un monopolo ($l=0$) non radia potencia. A potencia total radiada por unha distribución de fontes é a suma:

$$P = \frac{Z_0}{2k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l l(l+1) \left(|A_{lm}^{(E)}|^2 + |A_{lm}^{(M)}|^2 \right) \quad (6.35)$$

O momento radiado por unidade de tempo calcúlase de igual maneira. Se S é unha esfera con centro no orixen de coordenadas, dado que $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{r}}$, obtense de (2.29):

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \oint_S \mathbf{r} \times \mathbf{T} \hat{\mathbf{n}} da = -\oint_S \mathbf{r} \times [\varepsilon_0 \mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H} \otimes \mathbf{H}] \hat{\mathbf{n}} da$$

Se se trata dun multipolo unidade, de (6.19) e (6.20) resulta que solo queda o término eléctrico ou o magnético, dependendo do tipo de multipolo. En calquera caso o resultado é:

$$\mu_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{H} \otimes \mathbf{H}^*) \hat{\mathbf{r}} = \frac{k}{\omega} Z_0 (\mathbf{r} \times \mathbf{H}) H_r^* = \frac{k}{\omega} Z_0 l(l+1) \frac{h_l^{(2)}}{k} \frac{d}{dr} (r h_l^{(2)}) Y_{lm}^* (\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm})$$

Da parte angular a compoñente φ do produto vectorial non contribúe á integral, xa que

$$(\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm})_\varphi = r \frac{\partial}{\partial \theta} [P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}] \propto P_{l,m+1}(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

e ó integrar en θ o produto dos polinomios de Legendre con l distinto dá cero. En canto á compoñente θ :

$$(\mathbf{r} \times \nabla Y_{lm})_\theta = r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \varphi} = -\frac{im}{\sin \theta} Y_{lm}$$

Operando, observamos que ó integrar $|Y_{lm}|^2 \cos \theta / \sin \theta$ o resultado é cero. O resto dá a compoñente z :

$$\oint_S Y_{lm}^* \mathbf{r} \times \nabla Y_{lm} da = -im \hat{\mathbf{z}} \oint_S \frac{1}{\sin \theta} |Y_{lm}|^2 (-\sin \theta) da = -ir^2 m \hat{\mathbf{z}}$$

O traballo que queda xa está feito no apartado anterior. Queda que o multipolo unidade radia un momento \mathcal{L} dado por

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \hat{\mathbf{z}} \frac{Z_0}{2k^2} \frac{m}{\omega} l(l+1) \quad (6.36)$$

Obsérvase que, pra m dado, a relación entre momento e potencia radiados é fixa:

$$\left\langle \frac{d\mathcal{L}_z}{dt} \right\rangle = \frac{m}{\omega} \mathcal{P}_l,$$

e que un multipolo con $m = 0$ non radia momento angular.